

## 康熙《皇舆全览图》投影种类的统计分析

陆俊巍<sup>①</sup>, 韩昭庆<sup>②</sup>, 诸玄麟<sup>①</sup>, 钱浩<sup>①</sup>

(①复旦大学数学科学学院, 上海 200433; ②复旦大学历史地理研究中心, 上海 200433)

**【摘要】** 本文通过对《清廷三大实测全图集——康熙皇舆全览图》经纬线间距的仔细量测, 并运用数理统计和回归分析的方法, 从统计学上证实《皇舆全览图》的投影类型为桑逊投影。本文的研究显示, 运用统计的方法判别古地图的投影方式可以解决因史料欠缺、测量误差以及图幅因年代久远变形而带来的不确定性等问题。

**【关键词】** 康熙《皇舆全览图》; 数理统计; 回归分析; 桑逊投影

**【中图分类号】** P28

**【文献标识码】** A

**【文章编号】** 1009-2307(2011) 06-0016-04

## 1 《皇舆全览图》投影种类的研究意义及方法

康熙《皇舆全览图》是清代康熙四十七年至五十七年(1708-1718年)间采用西方制图方法绘制的一幅全国地图, 在我国测绘史上具有里程碑的意义。但是很长时期来, 没能从数学运算的角度对该图的投影方式进行较科学的求证。判断《皇舆全览图》的投影类型对于我国地图史的研究有着重要的学术意义。由于该图绘制年代相对久远, 存留的史料较为匮乏, 且古地图在测绘与翻印过程中还存在着种种误差, 所以以往学者对于它的投影方式有着不同的意见。有些观点认为是三角投影或梯形投影<sup>[1]</sup>, 也有观点认为其为桑逊投影<sup>[2]</sup>, 两者都有各自的计算作为支持, 但对于其他可能的投影类型都没有做出有力的排除。

方俊认为此图采用的是三角投影, 并给出相应的投影公式与量度<sup>[1]</sup>, 以后许多学者便以此为据。方俊是通过经线是直线的假定, 推导出相关投影公式, 但经线是直线这一结论仅是从全图中某一幅图得出的结论。从全图来看, 经线与纬线的夹角是随纬度减小而增加的, 说明经线并不是一根严格的直线, 由此可见经线是直线的假设仅仅是一种近似的结论。此外, 在本文的2.2节中, 我们将运用拟合的方法论证经线实际上是正弦曲线。

汪前进先生通过大量的数据分析, 首次提出《皇舆全览图》的投影方式为桑逊投影的全新观点, 纠正了以往学者认为其投影方式为三角投影或梯形投影的看法<sup>[3]</sup>, 也为本文的研究提供了一定的启示。汪在文献[2]中采取地图学中传统的判断投影类型的方法, 先通过经纬网的形状判断其为伪圆柱等积投影, 再从西方地图投影学的发展背景入手, 分析得出该投影为桑逊投影, 然后通过桑逊投影的公式与实际测量结果的比较分析进一步求证, 极大地推动了《皇舆全览图》的研究。然而, 这种经典的方法无法有效地判断投影公式与测量结果之间的差距是否是由地图制作过程中的误差所导致的, 故文献[2]中只能用类似于“差值绝对值小于等于0.2cm所占个数为319个, 比例为64.7%”等模糊语句来分析差距, 似有不严谨之嫌。尤其是当时古地图的测绘水平不高、制作技术落后, 在制图过程中必然会产生较大的误差, 这些误差也将对投影方法的

判别产生较大的干扰, 在这样的情况下, 用以上方法很难较好地甄别这种误差。而且有研究表明仅仅凭投影出现的时间来排除相关投影是有一定风险的, 有的投影在我们原以为的时间之前就出现了<sup>[4]</sup>。为此, 我们运用统计学中的多元回归与方差分析的方法来确定拟合结果与测量结果之间的差距是否确实是由制作误差所导致的, 然后再通过对相关数据的运算来推导该图投影方式。由于本文的统计方法只涉及经纬网格之间的测量而不需要运用相关史料, 也不涉及原图的变形问题, 同时我们还可以对不同的投影方式进行统计学上的比较和判断<sup>[5]</sup>, 而不仅限于依靠投影类型出现的时间来判断投影方式, 所以对于一些缺乏史料背景的古地图投影类型的判别有一定推广价值。

## 2 《皇舆全览图》投影公式的统计分析

本文采用汪前进、刘若芳整理的《清廷三大实测全图集——康熙皇舆全览图》, 该图系民国十八年(1929年)重印的原《皇舆全览图》, 题名《满汉合璧清内府一统舆地秘图》, 此图铜版印刷, 于1929年在沈阳故宫发现, 共49块, 其中有图者41块<sup>[6]</sup>。该图排号如图1所示。在每张图上, 每隔经、纬度一度标出经纬线。

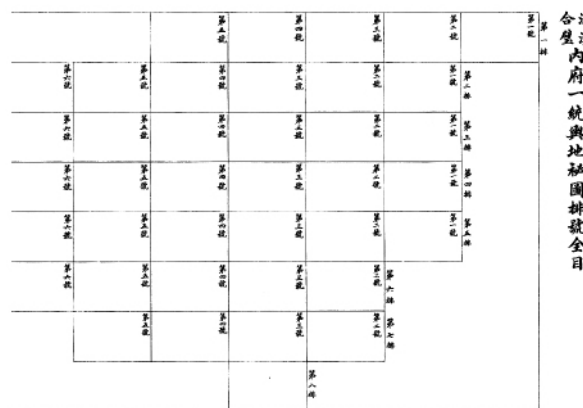


图1 《皇舆全览图》排号方式

由于《皇舆全览图》在测绘过程中将北京所在的经线定为0°经线, 根据该图的介绍<sup>[6]</sup>, 测绘时对于0°经线附近的测量是比较精确的, 当时中国西部, 关外的测绘由于受到地理、政治的影响, 往往不是很准确。为了保证精度, 我们选取测量了《皇舆全览图》0°经线附近的第三排1, 2, 3号、第四排1, 2, 3号与第五排1, 2, 3号的每度经线和纬线之间的距离, 共得出540个数据(见附表), 并通过Matlab软件进行了数据的分析与拟合, 由于纬度横跨的范围过小, 拟合结果不尽如人意; 于是我们又对第六、七、八排2, 3号(第八排只有3号)的数据共310个进行分析拟合, 使结果的可靠性有了大幅的提高。

作者简介: 陆俊巍(1990-), 男, 上海人, 在读本科生。  
E-mail: 08300180025@fudan.edu.cn

收稿日期: 2010-05-24  
通讯作者: 韩昭庆 副教授 E-mail: zhqhan@yahoo.com



我们采用常见的塑料米尺测量，测量的精度要求到毫米，以 0° 经线为标准测量每个测量点(由其经纬度定位)与 0° 经线之间的距离，还测量了不同纬线之间的距离。由于出版时受版面限制，此图尺寸较原图略微缩小，所以本文中测得的数据比原图偏小，但是由于该图是等比例缩小的，并不会影响投影公式的推算。下面本文使用 Matlab 7.0 与 SPSS 13.0 分析工具对《皇舆全览图》的投影方式进行分析<sup>[7,8]</sup>。

2.1 纬度差与经度值和纬度值的无关性

首先我们使用 SPSS 统计软件对纬度差的相关性进行了分析。我们约定纬度差表示不同经度值和纬度值下纬线之间的距离大小，通过对于纬度差与经度值和纬度值的相关性分析，如表 1 所示。(其中 N 表示数据个数; Sig. 表示相关系数，相关系数越大说明相关性越强)。可以发现纬度差与经度和纬度并不显著相关(显著系数为 0.726 和 0.620)，而且由其分布直方图(图 2)，发现其值较好地满足正态分布，由此我们可以断定数据的波动是由测量和制作的误差引起的，纬度差应该是常数。在几种投影方式中，纬线等距的只有可能是圆锥投影，圆柱投影和伪圆柱投影，而圆锥投影和圆柱投影经线与纬线是相互正交，这与《皇舆全览图》的经纬线间的倾斜夹角不符，而伪圆柱投影的等距纬线是直线，这也就意味着纬线为等距直线。通过数据统计(表 2)我们可以看到纬度差的 95% 置信区间为 6.50cm-6.53cm，由数据的正态分布性，这 3mm 的数据波动可以判定为测量和制图时所产生的误差。

表 1 纬度差与经度、纬度的相关性分析

		相关性		
		纬度	经度	纬度差
纬度	Pearson 相关系数 Correlation	1	.000	.032
	Sig. (2-tailed)		1.000	.726
	N	125	125	125
经度	Pearson 相关系数 Correlation	.000	1	-.045
	Sig. (2-tailed)	1.000		.620
	N	125	125	125
纬度差	Pearson 相关系数 Correlation	.032	-.045	1
	Sig. (2-tailed)	.726	.620	
	N	125	125	125

由此，可以断定纬线为等距直线，距离的平均值 6.52cm，其 95% 置信区间为 6.50-6.53cm，即每度纬线相距 6.52cm。我们就得到了经纬网坐标中关于纬线位置 X 的公式：

$$X = 6.52 \times \varphi$$

其中 X 是投影的纵坐标，φ 是地理纬度。

2.2 经线类型判定

由于纬线是一系列平行直线，经线是与中央经线对称的曲线，可以判定其投影为伪圆柱投影。伪圆柱投影

表 2 纬度差的统计量分析

		统计量分析	
		数据	标准误差
平均值	纬度差	6.5174	
95% 置信区间	上界	6.5013	.00814
	下界	6.5335	

的经线可以是任何曲线，但基本上采用正弦曲线或者椭圆曲线<sup>[9,10]</sup>，由于有些学者认为该投影是三角投影，所以本文中对于 3 种可能的经线形式都进行了回归分析，来判断那种为其投影方式的正解。

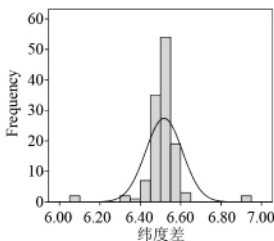


图 2 纬度差直方图与正态分布拟合

由于伪圆柱投影经线是关于赤道对称的<sup>[9]</sup>，所以我们将拟合曲线设定为关于赤道对称的，技术上的方法是把数据对称地投到南半球，这样拟合曲线就可以关于赤道对称了。通过对皇舆全览图第 3, 4, 5, 6, 7, 8 排 2, 3 号(第八排只有 3 号)经纬网的测量，我们可以建立西经 8° 到东经 8°(根据原图的规定，我们以过北京的经线为 0° 经线，以下使用的经度，若未特别指出，都是指这种经度)的经线坐标。其中横坐标轴表示数据点与赤道的距离(单位 cm)<sup>①</sup>，纵坐标表示西经 1°-8° 经线与北京的 0° 经线间的距离(单位 cm)，图 3、4 可以清楚地看到通过不同方法(包括正弦、椭圆、直线)拟合出的图像。

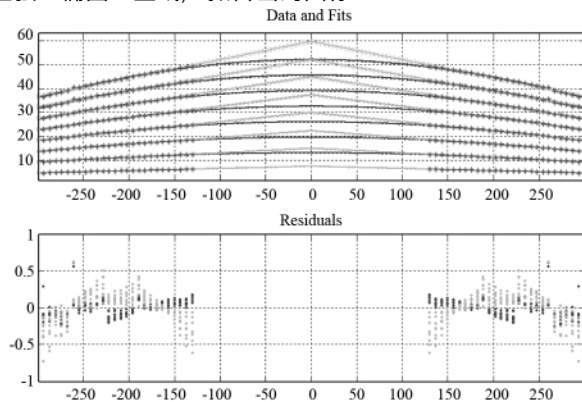


图 3 西经 1°-8° 正弦经线与直线经线拟合与残差分析  
注: 上半张图中红点表示实测数据点, 蓝线表示正弦拟合经线, 绿线表示直线拟合经线, 下半张图中蓝点和绿点分别表示正弦拟合点和直线拟合点与实测点的残差。

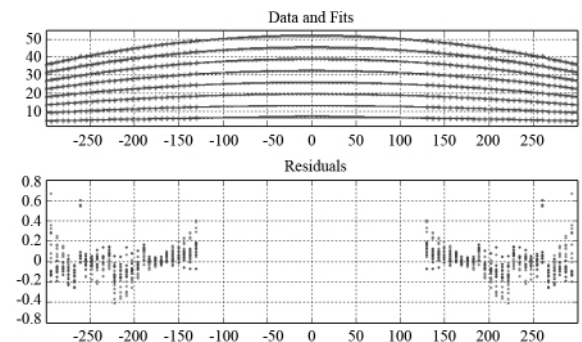


图 4 西经 1°-8° 正弦经线与椭圆经线拟合与残差分析  
注: 上半张图中红点表示实测数据点, 蓝线表示正弦拟合经线, 棕色线表示椭圆拟合经线, 下半张图中蓝点和棕色点分别表示正弦拟合点和椭圆拟合点与实测点的残差。

经线对不同曲线的拟合与其误差情况，如图 3 和图 4 所示。由于直线与正弦的主要误差出现在低纬度地区，观察图 3 可以发现，在靠近赤道的数据点(用绿色表示)上，直线拟合出现了明显的远离标准值，且距离标准值越来越远。而椭圆与正弦的主要误差出现在高纬度地区，观察图 4 可以发现，在靠近极点的数据点(用棕色表示)上，直线拟合出现了明显的远离标准值，且距离标准值越来越远。由这些对于经线的拟合图可以看出，正弦经线的残差在直线经线和椭圆经线的残差之间，而直线和椭圆的残差在高纬度与低纬度地区都有较大的误差。所以我们可以基本判定伪圆柱投影的经线为正弦曲线。

此外，还可通过西经 1 度的拟合数据增强这种判断(表 3-表 5)的可靠性，3 种拟合方案决定系数(R-square)分

① 其中北半球为实测数据，南半球为虚拟数据。

别为 0.9946 ( 正弦 ), 0.9939 ( 椭圆 ), 0.9837 ( 直线 ), 由此可以说明正弦曲线是最好的拟合。

### 2.3 经线公式的拟合

在确定经线是正弦曲线后, 即可以判断皇舆全览图为正弦经线伪圆柱投影。正弦经线伪圆柱投影的投影种类非常之多, 要确定具体为那种投影方式<sup>[9,10]</sup>, 就需要对经线作更加精细的拟合。我们假设经线最一般的公式为:

$$Y = a \cos \frac{X}{b} + c$$

( 其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是待定的系数,  $X$  代表投影纵坐标,  $Y$  代表投影横坐标)

只要确定相应的系数  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 投影公式就可以完全确定下来了。通过拟合, 西经 8° 到东经 8° 的相应的系数拟合见表 6。

由表 6 可以发现, 系数  $b$  和  $c$  的大小基本上在一个值附近波动, 因此假设它们是与经度值无关的量, 通过相关性分析, 可以发现只有系数  $a$  与经度值显著相关 (Sig. 是 0), 而  $b$  与  $c$  较好地满足在其平均值周围正态分布 ( 图 5 ), 由此可以判定数据的波动是由测量和制作是的误差引起的。

由于  $a$  与经度值显著相关, 而且非常接近线性关系, 运用线性回归方法拟合出系数  $a$  与经度值的线性方程为  $a = 6.482\lambda + 0.151$ , 决定系数为 1.000, 可见线

表 3 西经 1° 正弦经线拟合表

西经 1 度正弦经线	
拟合方程:	$f(x) = a * \cos(x/b * 3.1416/180) + c$
	$a = 6.51$
拟合系数:	$b = 6.53$
	$c = -0.01017$
决定系数	0.9946

表 4 西经 1° 椭圆经线

西经 1 度正弦经线	
拟合方程:	$f(x) = b * \sqrt{1 - x^2 / (a^2 - a)}$
	$a = 419.3$
拟合系数:	$b = 6.381$
决定系数	0.9939

表 5 西经 1° 直线经线

西经 1 度正弦经线	
拟合方程:	$f(x) = a * \text{abs}(x) + b$
	$a = -0.009174$
拟合系数:	$b = 7.38$
决定系数	0.9837

表 6 西经 8°-东经 8° 正弦经线拟合参数表

系数	a	b	c
W8	52.038	6.54	-0.00494
W7	45.6791	6.4567	-0.03837
W6	39.238	6.3334	-0.09217
W5	32.6802	6.5125	-0.0038
W4	26.132	6.5288	0.0327
W3	19.5702	6.3854	0.0175
W2	13.1795	6.6191	-0.0187
W1	6.3426	6.6189	0.0726
0	0.0428	6.3559	-0.1336
E1	-6.4218	6.5571	0.0714
E2	-13.1403	6.46	0.1624
E3	-19.4599	6.569	-0.0692
E4	-25.9576	6.5816	0.0858
E5	-32.0163	6.5712	0.1254
E6	-39.1195	6.629	-0.1594
E7	-45.4157	6.6191	0.0219
E8	-50.7545	6.3798	-0.0922

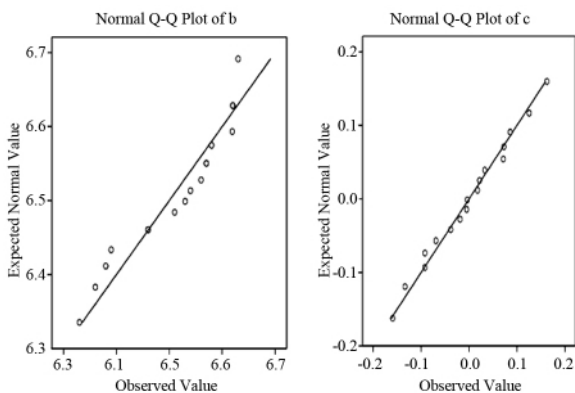


图 5 参数 b, c 的正态分布性

性关系非常好。

线性方程中的常数项  $\lambda_0$  为 0.151, 但是因为伪圆柱投影 0° 经线与 0° 纬线应该垂直相交于坐标原点, 所以上面所得的线性拟合结果中的常数项应该为零, 实际拟合中出现的常数项  $\lambda_0 = 0.151\text{cm}$ , 在用毫米直尺测

量的情况下不超出误差允许范围, 可以视为由测量误差导致的。其中图 6 的第一个数据所出现的异常, 与其他

数据较小的误差不符, 应该是地图或者测量误差所造成的。

由此我们拟合出了经线的公式( 将参数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  确定代入得):  $Y = (6.482\lambda + 0.151) \cos \frac{X}{6.514} - 0.0013$

其中  $\lambda$  是经度值。

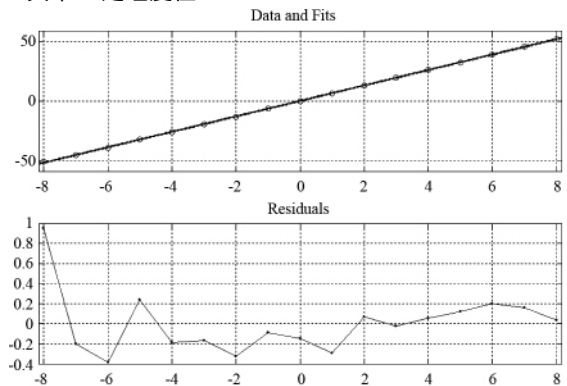


图 6 参数 a 与经度值线性拟合与残差分析

### 2.4 投影公式的确定

通过前面的讨论, 我们得出了经纬网的投影公式:

$$\begin{cases} X = a_1 \varphi \\ Y = (a_2 \lambda + \lambda_0) \cos \frac{X}{b} + c \end{cases}$$

各个系数的拟合值见表 9。

表 9 各个系数的拟合值与 95% 置信区间

	$a_1$	$a_2$	$b$	$c$
系数拟合值	6.517	6.482	0.151	6.514 -0.0013
95% 置信区间	下界	6.501	6.448	-0.013 6.462 -0.474
	上界	6.5334	6.515	0.315 6.565 0.0448

再比较一下正弦经线伪圆柱投影的各种公式和拟合系数的置信区间, 可以发现  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$  彼此相等的概率约为 95%,  $\lambda_0$  和  $c$  的值也可以认为是 0, 通过这样的推算, 我们最终得到皇舆全览图的投影公式为:

$$\begin{cases} X = a\varphi \\ Y = a\lambda \cos \frac{X}{a} \end{cases}$$

整理后可得:

$$\begin{cases} X = a\varphi \\ Y = a\lambda \cos\varphi \end{cases}$$

其中  $X$  为投影纵坐标,  $Y$  为投影横坐标,  $\varphi$  为地理纬度,  $\lambda$  为地理经度。这个公式就是著名的桑逊投影, 由此就可以确定皇舆全览图的投影公式是桑逊投影。

( 下转第 27 页)

措施:

- 1) 降低“最小区位码”数量。
- 2) 增加光栅码道内条纹的数量。
- 3) 选取分辨率更高、像元尺寸更小的 CCD 传感器。
- 4) 取更多个样本做平均。

然而这几种措施并不是无限制使用的,降低“最小区位码数量”需增加条纹种类,不利于解码时编码的区分;增加条纹数量势必增加光栅刻画难度;像元尺寸变小或取更多个样本做平均,必然导致数据量增大,降低运算速度。因此应用中需平衡各种因素的相互关系,使系统达到最优。

### 5 结束语

单码道绝对编码方法是国际上出现的一个新技术,在角度和位移的计量中有着广阔的应用前景。本文提出了一种新的单码道绝对编码方法,具有“惟一性”、“闭合性”和高精度等特点。将其应用于电子经纬仪的角度测量中,精度达到 $2''$ ,满足了测绘仪器的精度要求。

### 参考文献

- [1] 苏海冰,刘恩海.单圈绝对式编码器的研制[J].光学精密工程,2002,10(1).
- [2] 杨俊志.单码道绝对式角度编码器的编码及解码原理[J].仪器仪表学报,2004,25(增刊):139-141.
- [3] 郁有文,常健.绝对码编码器中一种新型的编码方法[J].仪器仪表学报,2004,25(4).
- [4] 陈小莉,赵茂泰,崔卫红,李付明.基于绝对编码测角算法的电子经纬仪研究[J].武汉大学学报信息科学版,2005,30(5).
- [5] 邱成,朱衡君.绝对式光学编码器串行编码方法的研究[J].光学技术,2006,32(5).
- [6] 陈赞,孙承浦,何惠阳.单圈绝对式码盘编码方法的研究[J].光子学报,2006,35(3).
- [7] 熊金旺,贾平,刘晶红.利用图像传感器的光电轴角编码器编码研究[J].测控技术,2009,28(12).

### Single track absolute coding and decoding method for high performance encoder

**Abstract:** A single-track absolute coding and decoding method were presented in the paper, the rule of coding in the nature of uniqueness, to select any coding sequence  $N_i$  by no less than  $N$  codes, that  $N_i$  is unique and corresponds to a sole displacement or angle value in the optical grating. Another attribute of the coding method was enclosed, beginning with any coding sequence called  $N_0$ , selecting the other sequences  $N_1, N_2, \dots, N_n$  bit by bit, that each of them was different from others. Decoding method was composed by querying an approximation and computing a subdivision. Taking mean value from several samples could raise the accuracy of demodulation. Electronic theodolite was developed successfully by this coding and decoding method, which has 2 second precision.

**Key words:** single track; high precision; absolute coding; decoding; electronic theodolite

LIANG Li-tao<sup>①</sup>, JU Yao-cheng<sup>②</sup>, ZHOU Rong-hua<sup>③</sup>, GE Yong-bing<sup>④</sup>, ZHU Hai-jun<sup>①</sup> (①Changzhou Dadi Surveying Science & Technology Co., Ltd, Jiangsu Changzhou 213022, China; ②Changzhou College of Information Technology, Jiangsu Changzhou 213022, China; ③Changzhou Institute of Technology, Jiangsu Changzhou 213002, China; ④Software Institute, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

(上接第 18 页)

### 3 结束语

本文通过对《皇舆全览图》的实际测量、投影类型的统计分析,确定了其投影类型为桑逊投影,体现出数理统计和回归分析工具在处理判别地图投影类型问题上的优势,即数据客观实在,无可争议,除了微小的测量误差与地图形变外,不存在资料记载的错误。由于本文较少依赖于历史材料,仅仅是运用了数学的客观理论便找出了地图的投影的具体公式,所以对于那些相关史料极其缺乏的古地图投影类型的判别,统计的方法应该是有很大参考价值与帮助的。

### 参考文献

- [1] 方俊.地图投影学(第一册)[M].北京:科学出版社,1957.
- [2] 汪前进.康熙铜版《皇舆全览图》投影各类新探[J].自然科学史研究,1991,10(2).

- [3] 王庸.中国地图史纲[M].北京:三联书店,1958.
- [4] Keuning Johannes. The History of Geographical Map Projections until 1600 [J]. Imago Mundi, 2009, 12: 1-24.
- [5] 李静萍,谢邦昌.多元统计分析方法与应用[M].北京:中国人民大学出版社,2008.
- [6] 汪前进,刘若芳.清廷三大实测全图集(全3卷)[M].北京:外文出版社,2007.
- [7] 袁克定.数据统计分析与实践——SPSS for Windows[M].北京:高等教育出版社,2006.
- [8] 陈仲生.基于 Matlab7.0 的统计信息处理[M].长沙:湖南科学技术出版社,2005.
- [9] 胡毓钜.地图投影[M].北京:测绘出版社,1981.
- [10] Snyder John P. Map Projection Bibliography. U. S.: Geological Survey Bulletin, 1997.

### A statistical analysis on the projection type applied in Huang Yu Quan Lan Tu

**Abstract:** This article aimed to verify the type of projection applied in Huang Yu Quan Lan Tu, a complete atlas of the imperial domain during the Kangxi reign in the Qing Dynasty with statistical methods. Through careful measurement of the length between longitudes and latitudes in this atlas, 850 data were collected. Based on multiple regression analysis on these data with the application of SPSS and Matlab, it showed that the type of projection in Huang Yu Quan Lan Tu is Sanson projection. The result also proved that the statistical method is viable for the identification of the projection type of the old maps without detailed related information and with apparent deformation.

**Key words:** Huang Yu Quan Lan Tu; mathematical statistics; multiple regression analysis; Sanson projection

LU Jun-wei<sup>①</sup>, HAN Zhao-qing<sup>②</sup>, ZHU Xuan-lin<sup>①</sup>, QIAN Hao<sup>①</sup> (①School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China; ②Center for Historical Geographic Studies, Fudan University, Shanghai 200433, China)